

# Algèbre linéaire

STA101 TD3

2025-2026

## Exercice 1

1. Dans  $\mathbb{R}^3$ , montrer que les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  sont libres.
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces 3 vecteurs?
3. En déduire une base de  $\mathbb{R}^3$
4. Pour quelles valeurs de  $a$ , les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont-ils liés?

## Exercice 2

On rappelle que la covariance empirique  $s_{X,Y}$  entre deux vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  est donnée par

$$s_{X,Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (1)$$

1. Montrer que la covariance empirique entre deux variables centrées définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$
2. En déduire que le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1

## Exercice 3

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer (si elles existent)  $A+C$ ,  $AC$ ,  $CA$ ,  $AB$ ,  $A'$ ,  $B'$
2. Vérifier que  $(BA)' = A'B'$

## Exercice 4

1. Rappeler la définition de la trace d'une matrice.
2. Soient  $A$  une matrice de dimensions  $(p \times q)$  et  $B$  une matrice de dimensions  $(q \times p)$  et  $C = AB$  et  $D = BA$ . Montrer que  $\text{trace}(C) = \text{trace}(D)$ .

3. Application numérique:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer la trace des produits

4. Soit  $P$  une matrice inversible  $p \times p$  et  $A$  une matrice  $p \times p$ . Que vaut la trace de la matrice  $P^{-1}AP$ ?

## Exercice 5

1. Vérifier que  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  sont deux matrices orthogonales

2. Soit  $C$  une matrice orthogonale, montrer que  $|\det(C)| = 1$

*Indication : on pourra commencer par calculer le déterminant du produit  $CC'$*

### Exercice 6

Calculer le déterminant des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$