

Algèbre linéaire

STA101 TD4

2025-2026

Exercice 1

1. Soient A une matrice de dimension $p \times q$ et B une matrice $q \times p$. Que signifie μ vecteur propre de AB ?
2. Montrer que AB et BA ont mêmes valeurs propres non nulles
3. On pose $p = q$ et on suppose B inversible. Montrer que $\det(AB - \lambda I_p) = \det(BA - I_p \lambda)$.
4. En déduire que si λ est une valeur propre non nulle de AB , alors elle est aussi valeur propre de BA .

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A
2. Déterminer ses racines
3. En déduire que A est diagonalisable
4. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres -1, -3, 1 et 3
5. Diagonaliser A

6. En remarquant que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{8} = I_4$, déterminer l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par A^3

Exercice 3

Soit M une matrice symétrique définie positive d'ordre n

1. Montrer que les valeurs propres de M sont toutes positives
2. Montrer que pour toute matrice A inversible, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
3. Montrer que M^{-1} est une matrice
 - (a) symétrique
 - (b) positive (on pourra utiliser le fait que comme M est de rang n , donc de plein rang, ses colonnes définissent une base de \mathbb{R}^n . Par conséquent, tout vecteur y de \mathbb{R}^n , il existe x tel que $y = Mx$)
 - (c) définie
4. V étant une matrice symétrique d'ordre n , montrer que les vecteurs propres de VM , u_1 et u_2 associés aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 , sont orthogonaux pour la métrique M .

Exercice 4

5 skieurs mesurent le nombre de descentes effectuées sur les jours J1 J2 et J3. On a les résultats suivants dans une matrice X :

Skieurs	J1	J2	J3
S1	10	15	14
S2	15	10	13
S3	18	12	16
S4	12	20	17
S5	14	10	14

Pour comparer deux skieurs, on utilise à la fin de chaque journée le cumul des descentes effectuées. Les résultats sont dans la matrice Y :

Skieurs	J1	J1+J2	J1+J2+J3
S'1	10	25	39
S'2	15	25	38
S'3	18	30	46
S'4	12	32	49
S'5	14	24	38

1. Trouver la matrice T vérifiant $Y = XT'$
2. Calculer le produit scalaire usuel (i.e. en utilisant la métrique $M = I_3$) entre les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 39 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 38 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs (colonnes) correspondent aux deux premières lignes de Y .
3. Quelle métrique M_{cum} faudrait-il utiliser pour obtenir le même résultat à partir des deux premières lignes de X ?
4. Calculer la distance entre S_1 et S_2 selon la métrique M_{cum}
5. Calculer la distance entre S'_1 et S'_2 selon la métrique usuelle. Commenter.